PEMODELAN REGRESI DERET FOURIER DAN SPLINE *TRUNCATED* DALAM REGRESI NONPARAMETRIK MULTIVARIABEL (APLIKASI: DATA KEMISKINAN DI PROVINSI PAPUA)

Ni Putu Ayu Mirah Mariati dan I Nyoman Budiantara
Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111
E-mail: ayumirahmariati@gmail.com,i_nyoman_b@statistika.its.ac.id

Abstrak— Analisis regresi digunakan untuk menyelidiki pola hubungan variabel dependen dengan variabel independen. Hal ini dapat dilakukan dengan dua pendekatan. Pendekatan yang paling umum dan sering digunakan adalah pendekatan parametrik. Pendekatan parametrik mengasumsikan bentuk model mengikuti pola tertentu. Apabila tidak ada informasi apapun tentang bentuk dari fungsi regresi, maka pendekatan yang digunakan adalah pendekatan nonparametrik. Terdapat pendekatan dalam estimasi kurva regresi nonparametrik diantaranya Deret Fourier dan Spline *Truncated*. Kelebihan Deret Fourier baik digunakan untuk menjelaskan kurva yang polanya berulang dan Spline *Truncated* adalah dapat menggambarkan perubahan pola perilaku dari fungsi pada sub interval tertentu. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan estimasi regresi Deret Fourier begitu pula estimasi regresi nonparametrik Spline *Truncated* dan menerapkan pada data kemiskinan di Provinsi Papua. Aplikasi data yaitu data kemiskinan di Provinsi Papua. Provinsi Papua menduduki peringkat pertama presentase penduduk miskin berdasarkan provinsi di Indonesia. Berdasarkan pemodelan yang telah dilakukan menggunakan Spline *Truncated* dan Deret Fourier pada kasus kemiskinan di Papua maka dapat disimpulkan bahwa metode Spline *Truncated* lebih baik digunakan karena GCV yang minimum dan R^2 lebih besar dibandingkan dengan Deret Fourier. Dengan nilai GCV yang diperoleh yaitu 16,70 dan R^2 sebesar 98,46%.

***Kata Kunci*— Data Kemiskinan, Deret Fourier, Regresi Nonparametrik, Spline *Truncated*.**

I. PENDAHULUAN

Dalam memodelkan suatu data dengan menggunakan regresi, hal yang pertama dilakukan adalah apakah variabel tersebut mempunyai hubungan atau tidak. Analisis regresi merupakan salah satu analisis dalam Statistika yang digunakan untuk menyelidiki pola hubungan fungsional antara satu atau lebih variabel. Disamping itu, tujuan lain analisis regresi adalah untuk memprediksi (meramal). Dalam mengestimasi kurva regresi terdapat tiga pendekatan, yaitu pendekatan regresi parametrik, regresi nonparametrik dan regresi semiparametrik.

Metode estimasi yang banyak mendapat perhatian dari beberapa peneliti regresi nonparametrik salah satunya adalah Deret Fourier. Deret Fourier merupakan polinomial trigonometri yang mempunyai fleksibilitas, sehingga dapat menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal data [1]. Selain itu, penelitian mengenai estimator regresi semiparametrik Deret Fourier dan karateristiknya telah dilakukan oleh [2]. Deret Fourier baik digunakan untuk menjelaskan kurva yang polanya berulang [3]. Estimator Deret Fourier ini umumnya digunakan apabila data yang diselidiki polanya tidak diketahui dan ada kecenderungan pola berulang [4]. Berikutnya, [5] melakukan penelitian mengenai estimator Deret Fourier terbobot pada regresi nonparametrik. Selain itu, penelitian dilakukan oleh [6] dan [7] tentang estimasi Deret Fourier pada regresi nonparametrik birespon. [8] melakukan penelitian mengenai model regresi nonparametrik dengan pendekatan Deret Fourier pada kasus tingkat pengangguran tebuka di Jawa Timur.

Selain itu, pendekatan regresi nonparametrik yang cukup populer adalah Spline. Spline merupakan potongan-potongan polinomial yang memiliki sifat tersegmen dan kontinu. Salah satu kelebihan Spline adalah model yang cenderung mencari sendiri estimasi data kemanapun pola data tersebut bergerak. Kelebihan ini terjadi karena dalam Spline terdapat titik-titik knot, yaitu titik perpaduan bersama yang menunjukkan terjadinya perubahan pola perilaku data [9]. Dengan titik knot ini, Spline dapat memberikan fleksibilitas yang lebih baik daripada polinomial, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara efektif terhadap karakteristik lokal dari suatu fungsi atau data [10]. Dalam perkembangannya, [11] telah melakukan kajian untuk menggeneralisasi metode GCV untuk estimator Spline terbobot dan memperlihatkan sifat optimal asimtotik metode ini masih berlaku untuk estimator Spline terbobot. [12] melakukan penelitian menggunakan regresi Spline multivariabel untuk pemodelan kematian penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) di Jawa Timur. [13] meneliti tentang angka kelahiran kasar di Surabaya menggunakan regresi nonparametrik Spline. Berdasarkan kelebihan dalam Spline *Truncated* dan Deret Fourier maka penulis ingin membandingakan antara Deret Fourier dan Spline *Truncated*. Dalam penelitian ini dilakukan metode estimasi terhadap regresi Deret Fourier dan Spline *Truncated* dengan metode *Least Square*. Alasan menggunakan metode *Least Square* karena metode tersebut sederhana dan bebas dari distribusi. Selanjutnya, akan diaplikasikan pada data kemiskinan di Provinsi Papua.

Tujuan dari pembangunan milenium yang telah disepakati oleh anggota Perserikatan Bangsa– Bangsa (PBB) dan Konferensi Tingkat Tinggi (KTT) adalah *Millenium Development Goals* (MDGs). MDGs yang disepakati sejak tahun 1990 hingga 2015 memiliki tujuan untuk mempercepat pembangunan dan pengentasan kemiskinan.

Fokus yang tersirat dari deklarasi ini adalah meningkatkan kesejahteraan manusia dalam berbagai aspek. Salah satu aspek dari kesejahteraan manusia adalah kemiskinan.

Penelitian mengenai pemodelan penduduk miskin di Jawa Timur juga pernah dilakukan oleh [14] dan wilayah Jawa Tengah [15] dengan metode Geographically Weighted Regression (GWR). [16] juga meneliti mengenai persentase penduduk miskin di Jawa Timur menggunakan regresi Semiparametrik Spline. Selanjutnya, [17] melakukan pemodelan penduduk miskin di Jawa Tengah dengan menggunakan metode SEM dan GSCA. Pada tahun yang sama, [18] melakukan pemodelan indikator kemiskinan di Jawa Timur dengan menggunakan regresi Spline *Polynomial Truncated* multirespon. Penelitian mengenai jumlah penduduk miskin di Jawa Timur pernah dilakukan oleh [19]. Metode yang digunakan adalah metode analisis regresi linier berganda. Selain itu, [20] meneliti mengenai pemodelan kemiskinan di Provinsi Jawa Timur dengan pendekatan multivariate adaptive. Sehingga, berdasarkan hal tersebut belum ada yang meneliti penduduk miskin di Provinsi Papua.

Berdasarkan Kementrian Daerah tertinggal pada tahun 2014 Provinsi Papua merupakan provinsi urutan pertama yang merupakan daerah tertinggal di Indonesia. Dalam [21] terdapat peringkat presentase penduduk miskin berdasarkan provinsi di Indonesia dan Provinsi Papua menduduki peringkat pertama. Berdasarkan hal tersebut pada penelitian ini akan dimodelkan presentase kemiskinan dengan menggunakan regresi Spline *Truncated* dan Deret Fourier di salah satu Provinsi di Indonesia yaitu Provinsi Papua. Selanjutnya, membandingkan antara regresi Spline *Truncated* dan regresi Deret Fourier sehingga berdasarkan data kemiskinan di Provinsi Papua akan diketahui metode yang baik untuk digunakan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi Nonparametrik Deret Fourier

Estimator Deret Fourier univariabel dalam regresi nonparametrik umumnya digunakan apabila data yang diselidiki polanya tidak diketahui dan ada kecendrungan pola berulang [22]. Diberikan model regresi nonparametrik univariabel $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,\ i = 1,2,\dots,n$. Bentuk kurva regresi $f(x)$ diasumsikan tidak diketahui dan termuat di dalam ruang fungsi kontinu $C(0,\pi)$. *Error* random ε_i diasumsikan berdistribusi normal independen dengan mean nol dan variansi σ^2. Karena $f(x)$ kontinu pada interval $(0,\pi)$, maka dapat dihampiri oleh fungsi Deret Fourier $F(x)$, dengan:

$$F(x) = bx + \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \cos kx$$

dimana $b, \alpha_0, \alpha_k, k = 1,2,\dots,K$ merupakan parameter-parameter model.

2.2 Regresi Nonparametrik Spline

Spline adalah salah satu bentuk estimator yang juga seringkali digunakan dalam regresi nonparametrik karena mempunyai intepretasi visual yang baik, fleksibel, serta mampu menangani karakter fungsi yang bersifat mulus [23].

Model regresi nonparametrik secara umum dapat disajikan sebagai berikut

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1,2,\dots,n \tag{1}$$

dengan $f(x_i)$ merupakan kurva regresi yang dihampiri dengan fungsi spline berorde p dengan titik knot $K_1, K_2, \dots, K_r$ yang dapat diberikan oleh persamaan.

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^{p} \beta_{p+j} \left(x_i - K_j\right)_+^p \tag{2}$$

Apabila persamaan (1) disubstitusikan kedalam persamaan (2) maka akan diperoleh persamaan regresi nonparametrik Spline sebagai berikut.

$$y_i = \sum_{j=0}^{p} \beta_j x_i^j + \sum_{j=0}^{p} \beta_{p+j} \left(x_i - K_j\right)_+^p + \varepsilon_i, i = 1,2,\dots,n \tag{3}$$

Fungsi $\left(x_i - K_j\right)_+^p$ pada persamaan (3) merupakan fungsi *truncated* (potongan) yang diberikan oleh:

$$\left(x_i - K_j\right)_+^p = \begin{cases} \left(x_i - K_j\right)^p & , x_i \geq K_j \\ 0 & , x_i < K_j \end{cases}$$

2.3 Pemilihan Titik Knot Optimal

Untuk memperoleh titik knot optimal dapat dilihat dari nilai GCV yang paling minimum [24]. Metode GCV secara umum didefinisikan sebagai berikut.

$$GCV(K_1, K_2, \dots, K_r) = \frac{MSE(K_1, K_2, \dots, K_r)}{\left(n^{-1} trace\left[I - A(K_1, K_2, \dots, K_r)\right]\right)^2}$$

dengan

$$MSE(K_1, K_2, \dots, K_r) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{f}(x_i)\right)^2$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

Untuk menyelesaikan permasalahan dan mencapai tujuan penelitian, dalam bab ini akan dibahas mengenai langkah-langkah penelitian yang dilaksanakan pada penelitian serta aplikasi datanya.

3.1 Mengkaji Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Deret Fourier.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Membentuk model dengan Nonparametrik Multivariabel.
b. Mendekati Kurva Regresi dengan Fungsi Deret Fourier.
c. Membentuk *Goodness of fit*.
d. Menyajikan persamaan *Least Square* dalam bentuk matriks.
e. Menyelesaikan optimasi.

3.2 Mengkaji Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Multivariabel.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Membentuk model dengan Nonparametrik Spline Multivariabel.
b. Mendekati Kurva Regresi Spline *Truncated*.
c. Membentuk optimasi *Least Square*.

d. Menyajikan persamaan *Least Square* dalam bentuk matriks.
e. Menyelesaikan optimasi dengan derivatif parsial.

3.3 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder tahun 2012 yang diperoleh dari publikasi Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Papua yakni Survey Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) pada tahun 2012. Unit observasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah 29 Kabupaten/Kota yang ada di Provinsi Papua.

3.4 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah y adalah persentase penduduk miskin, $x_1$adalah angka melek huruf, $x_2$adalah rata-rata lama sekolah, $x_3$adalah pendidikan kurang dari SD, x_4 adalah bekerja di sektor pertanian dan $x_5$adalah bekerja di sektor informal.

3.5 Aplikasi model pada Data Kemiskinan di Provinsi Papua

a. Membuat *Scatterplot*.
b. Memodelkan data dengan menggunakan Spline *Truncated*.
c. Memilih titik knot optimal dengan metode GCV.
d. Menghitung nilai MSE dan R^2 model Spline *Truncated* yang terbaik.
e. Memodelkan data dengan menggunakan Deret Fourier.
f. Memilih parameter Bandwith optimal dengan menggunakan metode GCV.
g. Menghitung nilai MSE dan R^2 model Deret Fourier yang terbaik.
h. Membandingkan model Spline *Truncated* dan Deret Fourier.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan metode penelitian yang digunakan, bab ini membahas mengenai hasil dan analisis yang telah dilakukan sesuai dengan tujuan dari penelitian. Aapun hasilnya adalah mengkaji cara mendapatkan estimasi kurva regresi Deret Fourier, mendapatkan estimasi kurva regresi Spline *Truncated* dalam regresi nonparametrik multivariabel dan terapannya untuk membandingkan antara Deret Fourier dan Spline *Truncated* pada pemodelan data kemiskinan di Provinsi Papua.

4.1 Estimasi Kurva Regresi Deret Fourier dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel

Deret Fourier merupakan polinomial trigonometri yang mempunyai fleksibelitas yang tinggi. Deret Fourier baik digunakan untuk mengetimasi kurva regresi yang menunjukkan gelombang sinus atau cosinus. Diberikan model regresi nonparametrik multivariabel:

$$y_i=\mu\left(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{qi}\right)+\varepsilon_i$$
$$=\sum_{j=1}^{q}f_j\left(x_{ji}\right)+\varepsilon_i,\ i=1,2,\ldots,n$$

Selanjutnya, kurva regresi f_j dihampiri dengan fungsi Deret Fourier:

$$f_j\left(x_{ji}\right)=b_jx_{ji}+\frac{1}{2}\alpha_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\alpha_{kj}\cos kx_{ji},\ j=1,2,\ldots,q.$$

Estimator kurva regresi Deret Fourier diperoleh dari optimasi:

$$\underset{\underset{\sim}{\beta}\in R^{q(K+2)}}{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{q}\left(b_jx_{ji}+\frac{1}{2}\alpha_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\alpha_{kj}\cos kx_{ji}\right)\right)^2\right\}=\underset{\underset{\sim}{\beta}\in R^{q(K+2)}}{Min}\left\{\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

Untuk menyelesaikan optimasi diatas dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\left(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{qi}\right)\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{q}\left(b_jx_{ji}+\frac{1}{2}\alpha_{0j}+\alpha_{1j}\cos x_{ji}+\ldots+\alpha_{Kj}\cos Kx_{ji}\right)\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(b_1x_{1i}+\frac{1}{2}\alpha_{01}+\alpha_{11}\cos x_{1i}+\ldots+\alpha_{K1}\cos Kx_{1i}\right)-\ldots+\right.$$
$$\left.-\left(b_qx_{qi}+\frac{1}{2}\alpha_{0q}+\alpha_{1q}\cos x_{qi}+\ldots+\alpha_{Kq}\cos Kx_{qi}\right)\right)^2 \qquad (4)$$

Persamaan (4) diatas dapat ditulis menjadi:

$$\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)=\left(\underset{\sim}{y}-X(K)\underset{\sim}{\beta}\right)'\left(\underset{\sim}{y}-X(K)\underset{\sim}{\beta}\right) \qquad (5)$$

dengan:

$$\underset{\sim}{y}=\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]',$$

$$\underset{\sim}{\beta}=\left[b_1\ \ \frac{1}{2}\alpha_{01}\ \ \alpha_{11}\ \cdots\ \alpha_{K1}\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ b_q\ \ \frac{1}{2}\alpha_{0q}\ \ \alpha_{1q}\ \cdots\ \alpha_{Kq}\right]',$$

$$X(K)=\begin{bmatrix} x_{11} & 1 & \cos x_{11} & \cdots & \cos Kx_{11} & \vdots & \cdots & \vdots & x_{q1} & 1 & \cos x_{q1} & \cdots & \cos Kx_{q1}\\ x_{12} & 1 & \cos x_{12} & \cdots & \cos Kx_{12} & \vdots & \cdots & \vdots & x_{q2} & 1 & \cos x_{q2} & \cdots & \cos Kx_{q2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1n} & 1 & \cos x_{1n} & \cdots & \cos Kx_{1n} & \vdots & \cdots & \vdots & x_{qn} & 1 & \cos x_{qn} & \cdots & \cos Kx_{qn}\end{bmatrix}.$$

Persamaan (5) dapat ditulis:

$$\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)=\left(\underset{\sim}{y}'-\underset{\sim}{\beta}'X'(K)\right)\left(\underset{\sim}{y}-X(K)\underset{\sim}{\beta}\right)$$
$$=\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{y}'X(K)\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}'X'(K)\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{\beta}'X'(K)X(K)\underset{\sim}{\beta}$$
$$=\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}-2\underset{\sim}{\beta}'X'(K)\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{\beta}'X'(K)X(K)\underset{\sim}{\beta}.$$

Estimasi kurva regresi $\hat{\mu}$ diperoleh dengan cara ekuivalen dengan estimasi $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$. Estimasi $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ diperoleh dari meminimumkan $\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)$. Dengan menurunkan secara parsial $\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)$ terhadap $\underset{\sim}{\beta}$ didapat:

$$\frac{\partial\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\underset{\sim}{\beta}}=-2X'(K)\underset{\sim}{y}+2X'(K)X(K)\underset{\sim}{\beta} \qquad (6)$$

Jika persamaan (6) disamakan dengan nol diperoleh persamaan:

$$-2X'(K)\underset{\sim}{y}+2X'(K)X(K)\hat{\underset{\sim}{\beta}}=0.$$

Dengan sedikit penjabaran dan menganggap matriks $X(K)$ nonsingular (matriks dengan rank penuh) maka diperoleh estimator $\underset{\sim}{\beta}$ sebagai berikut:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}(K)=\left(X'(K)X(K)\right)^{-1}X'(K)\underset{\sim}{y}$$
$$=\left[\hat{b}_1\ \ \frac{1}{2}\hat{\alpha}_{01}\ \ \hat{\alpha}_{11}\ \cdots\ \hat{\alpha}_{K1}\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \hat{b}_q\ \ \frac{1}{2}\hat{\alpha}_{0q}\ \ \hat{\alpha}_{1q}\ \cdots\ \hat{\alpha}_{Kq}\right]'.$$

Estimator untuk kurva regresi f_j diberikan oleh:

$$\hat{f}_j\left(x_{ji}\right)=\hat{b}_jx_{ji}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\hat{\alpha}_{kj}\cos kx_{ji}.$$

Akibatnya estimasi untuk kurva regresi $\mu\left(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{qi}\right)$ diberikan oleh:

$$\hat{\mu}\left(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{qi}\right)=\sum_{j=1}^{q}\hat{f}_j\left(x_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{b}_jx_{ji}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\hat{\alpha}_{kj}\cos kx_{ji}\right).$$

4.2 Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Spline Multivariabel

Dalam bagian ini dibahas tentang estimasi Spline multivariabel. Spline merupakan jumlahan dari fungsi polinomial dengan suatu fungsi (*truncated*).

Diberikan model regresi nonparametrik multivariabel:

$$y_i = \mu\left(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi}\right) + \varepsilon_i$$

$$= \sum_{j=1}^{p} f_j\left(x_{ji}\right) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \ldots, n$$

Selanjutnya, kurva regresi f_j dihampiri dengan fungsi spline multivariabel:

$$f_j\left(x_{ji}\right) = \sum_{v=1}^{m} \beta_{vj} x_{ji}^{v} + \sum_{k=1}^{r} \beta_{j(k+m)}\left(x_{ji} - K_{jk}\right)_+^m$$

$$= \beta_{1j} x_{ji}^1 + \ldots + \beta_{mj} x_{ji}^m + \beta_{j(1+m)}\left(x_{ji} - K_{j1}\right)_+^m + \ldots + \beta_{j(r+m)}\left(x_{ji} - K_{jr}\right)_+^m$$

dimana *j = 1, 2, ..., p; v = 1, 2, ..., m;* dan *k = 1 ,2, ..., r* titik-titik knot yang memperlihatkan perubahan pola perilaku dari fungsi tersebut pada sub-sub interval yang berbeda. Dengan demikian model regresi dapat ditulis menjadi:

$$\sum_{j=1}^{p} f_j\left(x_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\beta_{1j} x_{ji}^1 + \ldots + \beta_{mj} x_{ji}^m + \beta_{j(1+m)}\left(x_{ji} - K_{j1}\right)_+^m + \ldots + \beta_{j(r+m)}\left(x_{ji} - K_{jr}\right)_+^m\right)$$

$$= \left(\beta_{11} x_{1i}^1 + \ldots + \beta_{m1} x_{1i}^m + \beta_{1(1+m)}\left(x_{1i} - K_{11}\right)_+^m + \ldots + \beta_{1(r+m)}\left(x_{1i} - K_{1r}\right)_+^m\right) + \ldots +$$

$$\left(\beta_{1p} x_{pi}^1 + \ldots + \beta_{mp} x_{pi}^m + \beta_{p(1+m)}\left(x_{pi} - K_{p1}\right)_+^m + \ldots + \beta_{p(r+m)}\left(x_{pi} - K_{pr}\right)_+^m\right) \quad (7)$$

Untuk menyelesaikan optimasi pada persamaan (7) dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\underset{\beta \varepsilon R^{p(m+r)}}{Min}\left\{n^{-1}\left\|y - X\beta\right\|^2\right\} = \left\{\left(\underset{\sim}{y} - X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)' \left(\underset{\sim}{y} - X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

dengan,

$$\underset{\sim}{y} = \left[y_1, \ldots, y_n\right]'$$

$$X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) = \left[A_1 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A_p\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_{11}^1 & \cdots & x_{11}^m & \left(x_{11} - K_{11}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{11} - K_{1r}\right)_+^m \\ x_{12}^1 & \cdots & x_{12}^m & \left(x_{12} - K_{11}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{12} - K_{1r}\right)_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}^1 & \cdots & x_{1n}^m & \left(x_{1n} - K_{11}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{1n} - K_{1r}\right)_+^m \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} x_{p1}^1 & \cdots & x_{p1}^m & \left(x_{p1} - K_{p1}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{p1} - K_{pr}\right)_+^m \\ x_{p2}^1 & \cdots & x_{p2}^m & \left(x_{p2} - K_{p1}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{p2} - K_{pr}\right)_+^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pn}^1 & \cdots & x_{pn}^m & \left(x_{pn} - K_{p1}\right)_+^m & \cdots & \left(x_{pn} - K_{pr}\right)_+^m \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \left(\underset{\sim}{\beta}_1', \ldots, \underset{\sim}{\beta}_p'\right)'$$

$$\underset{\sim}{\beta}_1 = \left(\beta_{11}, \ldots, \beta_{m1}, \beta_{1(1+m)}, \ldots, \beta_{1(r+m)}\right)', \ldots, \underset{\sim}{\beta}_p = \left(\beta_{1p}, \ldots, \beta_{mp}, \beta_{p(1+m)}, \ldots, \beta_{p(r+m)}\right)'$$

Untuk menyelesaikan optimasi dengan menggunakan derivatif parsial, misalkan:

$$\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right) = \left\{\left(\underset{\sim}{y} - X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)' \left(\underset{\sim}{y} - X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)\right\} \quad (8)$$

Persamaan (8) menjadi:

$$= \left(\underset{\sim}{y}' - \underset{\sim}{\beta}' X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\right)\left(\underset{\sim}{y} - X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)$$

$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}' X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y} - \left(\underset{\sim}{y}' X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}\right)$$
$$+ \underset{\sim}{\beta}' X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta}$$
$$= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\beta} X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y}$$
$$+ \underset{\sim}{\beta}' X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta} \quad (9)$$

Langkah berikutnya persamaan (9) diturunkan terhadap $\underset{\sim}{\beta}$:

$$\frac{\partial \mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = -2X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y}$$
$$+ 2X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{\beta} \quad (10)$$

Setelah persamaan (10) diturunkan hasilnya disamakan dengan 0, maka diperoleh persamaan:

$$0 = -2X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y}$$
$$+ 2X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\hat{\underset{\sim}{\beta}} \quad (11)$$

Hasil yang diperoleh dari persamaan (11) adalah

$$X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$
$$= X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y}$$

Sehingga estimator $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ diberikan oleh:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \left(X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right) X\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\right)^{-1} X'\left(K_{11}, \ldots, K_{1r} \vdots \cdots \vdots K_{p1}, \ldots, K_{pr}\right)\underset{\sim}{y}$$

dengan,

$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}_1', \ldots, \hat{\underset{\sim}{\beta}}_p'\right)'$, dimana:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_1 = \left(\hat{\beta}_{11}, \ldots, \hat{\beta}_{m1}, \hat{\beta}_{1(1+m)}, \ldots, \hat{\beta}_{1(r+m)}\right)', \ldots, \hat{\underset{\sim}{\beta}}_p = \left(\hat{\beta}_{1p}, \ldots, \hat{\beta}_{mp}, \hat{\beta}_{p(1+m)}, \ldots, \hat{\beta}_{p(r+m)}\right)'.$$

Estimator untuk kurva regresi f_j diberikan oleh:

$$\sum_{j=1}^{p} \hat{f}_j\left(x_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{v=1}^{m} \hat{\beta}_{vj} x_{ji}^{v} + \sum_{k=1}^{r} \hat{\beta}_{j(k+m)}\left(x_{ji} - K_{jk}\right)_+^m\right).$$

Akibatnya estimasi untuk kurva regresi $\mu\left(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi}\right)$ diberikan oleh:

$$\hat{\mu}\left(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi}\right) = \sum_{j=1}^{p} \hat{f}_j\left(x_{ji}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{v=1}^{m} \hat{\beta}_{vj} x_{ji}^{v} + \sum_{k=1}^{r} \hat{\beta}_{j(k+m)}\left(x_{ji} - K_{jk}\right)_+^m\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{v=1}^{m} \hat{\beta}_{vj} x_{ji}^{v} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} \hat{\beta}_{j(k+m)}\left(x_{ji} - K_{jk}\right)_+^m.$$

Setelah mendapatkan estimasi kurva regresi Deret Fourier dan Spline *Truncated*, maka selanjutnya akan memodelkan dengan menggunakan data kemiskinan di Provinsi Papua. Berikut ini akan dijelaskan model dengan menggunakan Deret Fourier dan Spline *Truncated*.

4.3 Model Regresi Nonparametrik Deret Fourier

Dalam regresi nonparametrik Deret Fourier, sangat tergantung pada parameter osilasi (K). Mendapatkan estimator Deret Fourier yang terbaik dalam regresi nonparametrik perlu dilakukan pemilihan parameter K yang optimal.

Nilai K optimal yang dipilih adalah nilai K yang menghasilkan nilai GCV minimum. Hasil analisis untuk nilai K diberikan pada Tabel 1 berikut ini:

Tabel 1. Penentuan Nilai Parameter Osilasi (K) Optimal Berdasarkan GCV

Parameter Osilasi (K)	GCV
1	214,27
2	84,73
3	18,79

Berdasarkan Tabel 1, nilai K=3 ini menghasilkan nilai GCV yang minimum yaitu 18,79. Selanjutnya model yang digunakan adalah Deret Fourier dengan parameter osilasi K=3. Berikut ini, estimasi model regresi nonparametrik Deret Fourier untuk model presentase penduduk miskin di Papua:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 &+ \hat{b}_1 x_{1i} + \hat{\alpha}_{11}\cos x_{1i} + \hat{\alpha}_{21}\cos 2x_{1i} + \hat{\alpha}_{31}\cos 3x_{1i} + \\
&\hat{b}_2 x_{2i} + \hat{\alpha}_{12}\cos x_{2i} + \hat{\alpha}_{22}\cos 2x_{2i} + \hat{\alpha}_{32}\cos 3x_{2i} + \\
&\hat{b}_3 x_{3i} + \hat{\alpha}_{13}\cos x_{3i} + \hat{\alpha}_{23}\cos 2x_{3i} + \hat{\alpha}_{33}\cos 3x_{3i} + \\
&\hat{b}_4 x_{4i} + \hat{\alpha}_{14}\cos x_{4i} + \hat{\alpha}_{24}\cos 2x_{4i} + \hat{\alpha}_{34}\cos 3x_{4i} + \\
&\hat{b}_5 x_{5i} + \hat{\alpha}_{15}\cos x_{5i} + \hat{\alpha}_{25}\cos 2x_{5i} + \hat{\alpha}_{35}\cos 3x_{5i}.
\end{aligned}
$$

Tabel 2. Estimasi Parameter Koefisien Regresi

Estimasi	Parameter	Estimasi	Parameter
$\hat{\beta}_0$	16,88	$\hat{\alpha}_{23}$	-2,99
$\hat{b}_1$	-0,27	$\hat{\alpha}_{33}$	0,49
$\hat{\alpha}_{11}$	-0,02	$\hat{b}_4$	-0,32
$\hat{\alpha}_{21}$	0,80	$\hat{\alpha}_{14}$	-13,58
$\hat{\alpha}_{31}$	-3,66	$\hat{\alpha}_{24}$	-9,10
$\hat{b}_2$	3,69	$\hat{\alpha}_{34}$	-9,48
$\hat{\alpha}_{12}$	-1,36	$\hat{b}_5$	0,14
$\hat{\alpha}_{22}$	-4,95	$\hat{\alpha}_{15}$	4,79
$\hat{\alpha}_{32}$	-0,04	$\hat{\alpha}_{25}$	10,28
$\hat{b}_3$	0,41	$\hat{\alpha}_{35}$	4,55
$\hat{\alpha}_{13}$	6,35		

Berdasarkan Tabel 2, estimasi model presentase penduduk miskin di Papua dengan pemodelan regresi nonparametrik Deret Fourier diberikan oleh:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_i = 16{,}88 &- 0{,}27x_{1i} - 0{,}02\cos x_{1i} + 0{,}80\cos 2x_{1i} - 3{,}66\cos 3x_{1i} + \\
&3{,}69x_{2i} - 1{,}36\cos x_{2i} - 4{,}95\cos 2x_{2i} - 0{,}04\cos 3x_{2i} + \\
&0{,}41x_{3i} + 6{,}35\cos x_{3i} - 2{,}99\cos 2x_{3i} + 0{,}49\cos 3x_{3i} + \\
&-0{,}32x_{4i} - 13{,}58\cos x_{4i} - 9{,}10\cos 2x_{4i} - 9{,}48\cos 3x_{4i} + \\
&0{,}14x_{5i} + 4{,}79\cos x_{5i} + 10{,}28\cos 2x_{5i} + 4{,}55\cos 3x_{5i}.
\end{aligned}
$$

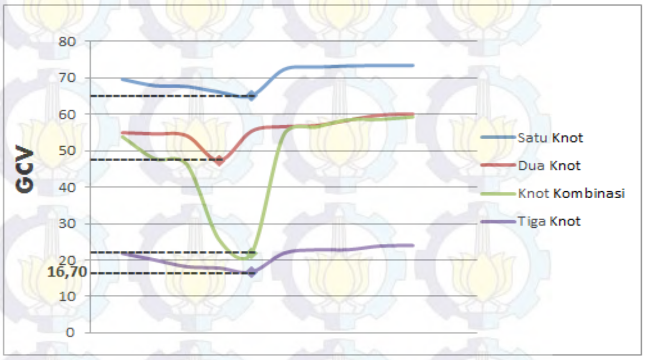
Model regresi Deret Furier dengan parameter osilasi sebanyak 3 ini memiliki R^2 sebesar 89,20%. Hal ini memiliki arti bahwa model ini dapat menjelaskan kemiskinan sebesar 89,20%.

4.4 Model Regresi Nonparametrik Spline *Truncated*

Pada pembahasan ini akan memodelkan kemiskinan dengan variabel yang diduga mempengaruhinya. Metode yang sesuai untuk digunakan memodelkan data ini adalah regresi nonparametrik Spline *Truncated*. Spline adalah model yang cenderung mencari sendiri estimasi data kemanapun pola data tersebut bergerak. Kelebihan ini terjadi karena dalam Spline terdapat titik-titik knot. Titik knot merupakan titik dimana pola dari data berubah. Untuk mendapatkan titik knot optimum maka menggunakan metode GCV. Untuk memilih nilai knot yang paling optimum digunakan nilai GCV yang paling minimum. Titik knot yang digunakan dalam penelitian ini adalah satu knot, dua knot, tiga knot dan kombinasi knot. Berikut adalah ringkasan pemilihan titik knot optimum.

Tabel 3. Perbandingan Nilai GCV untuk Berbagai Knot

Knot	GCV
1	65,14
2	47,28
3	16,70
Kombinasi	21,85



Gambar 1. GCV Satu knot, Dua Knot, Tiga Knot dan Kombinasi Knot

Terlihat pada Tabel 3 dan Gambar 1. maka yang digunakan untuk analisis selanjutnya adalah tiga titik knot. Berikut adalah model regresi nonparametrik Spline *Truncated* dengan tiga titik knot.

$$
\begin{aligned}
\hat{y} = \hat{\beta}_0 &+ \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 (x_1 - K_1)_+ + \hat{\beta}_3 (x_1 - K_2)_+ + \hat{\beta}_4 (x_1 - K_3)_+ + \\
&\hat{\beta}_5 x_2 + \hat{\beta}_6 (x_2 - K_4)_+ + \hat{\beta}_7 (x_2 - K_5)_+ + \hat{\beta}_8 (x_2 - K_6)_+ + \\
&\hat{\beta}_9 x_3 + \hat{\beta}_{10} (x_3 - K_7)_+ + \hat{\beta}_{11} (x_3 - K_8)_+ + \hat{\beta}_{12} (x_4 - K_9)_+ + \\
&\hat{\beta}_{13} x_4 + \hat{\beta}_{14} (x_4 - K_{10})_+ + \hat{\beta}_{15} (x_4 - K_{11})_+ + \hat{\beta}_{16} (x_4 - K_{12})_+ + \\
&\hat{\beta}_{17} x_5 + \hat{\beta}_{18} (x_5 - K_{13})_+ + \hat{\beta}_{19} (x_5 - K_{14})_+ + \hat{\beta}_{20} (x_5 - K_{15})_+ .
\end{aligned}
$$

Berikut ini akan diperlihatkan titik knot optimum dengan tiga titik knot.

Tabel 4. Pemilihan Titik Knot Optimum dengan Tiga Titik Knot

No	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	GCV
1	61,76	6,41	50,63	53,73	65,79	17,79
	74,94	8,02	66,56	69,74	77,63	
	98,38	10,88	94,89	98,22	98,68	
2	41,26	3,91	25,84	28,81	47,36	18,16
	63,23	6,59	52,40	55,51	67,10	
	67,62	7,13	57,71	60,84	71,05	
3	58,83	6,05	47,09	50,17	63,15	20,01
	60,30	6,23	48,86	51,95	64,47	
	89,59	9,81	84,27	87,54	90,79	
4	61,76	6,41	50,63	53,73	65,79	21,83
	76,41	8,20	68,33	71,52	78,95	
	98,38	10,88	94,89	98,22	98,68	
5	61,76	6,41	50,63	53,73	65,79	**16,70**
	73,48	7,84	64,79	67,96	76,31	
	98,38	10,88	94,89	98,22	98,68	

Hasil dari estimasi parameter dengan mengunakan tiga titik knot adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\hat{y} = &\ 145{,}11 + 0{,}64\, x_1 - 0{,}83(x_1 - 61{,}76)_+ - 0{,}39(x_1 - 73{,}48)_+ + \\
&218{,}58(x_1 - 98{,}38)_+ - 8{,}90\, x_2 + 13{,}97(x_2 - 6{,}41)_+ + \\
&-27{,}72\,(x_2 - 7{,}84)_+ - 2182{,}53\,(x_2 - 10{,}88)_+ + 0{,}11\, x_3 + \\
&0{,}41(x_3 - 50{,}63)_+ - 1{,}87(x_3 - 64{,}79)_+ + 8{,}31(x_3 - 94{,}89)_+ + \\
&-5{,}82\, x_4 + 9{,}44(x_4 - 53{,}73)_+ - 1{,}63(x_4 - 67{,}96)_+ - 45{,}01(x_4 - 98{,}22)_+ + \\
&3{,}08\, x_5 - 10(x_5 - 65{,}79)_+ + 5{,}95(x_5 - 76{,}31)_+ + 70{,}24(x_5 - 98{,}68)_+ .
\end{aligned}
$$

Model regresi Spline *Truncated* dengan 3 titik knot ini memiliki R^2 sebesar 98,46%. Hal ini memiliki arti bahwa model ini dapat menjelaskan kemiskinan sebesar 98,46%.

4.5 Pengujian Asumsi Residual

Pada analisis regresi nonparametrik Spline *Truncated*, residual yang terbentuk harus memenuhi asumsi IIDN. Pengujian asumsi dilakukan untuk mengidentifikasi apakah residual yang terbentuk identik, independen, dan berdistribusi normal. Berikut adalah hasil pengujian asumsi residual.

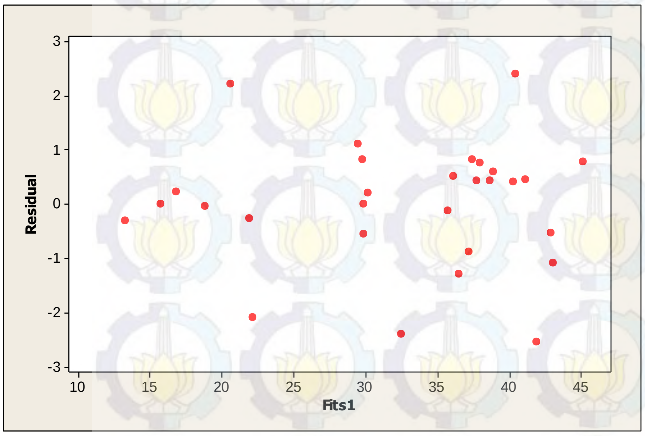
4.5.1 Uji Identik

Untuk melakukan pengujian asumsi residual identik maka menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$.

H_1 : minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Hipotesis di atas digunakan untuk mengetahui apakah variansi dari residual tersebut identik atau tidak. Untuk mengetahui apakah residual identik atau tidak, dapat dilakukan dengan uji secara visual dan uji *Glejser*. Uji secara visual dilakukan dengan cara membuat plot antara nilai dugaan respon dengan residual. Berikut adalah hasil plot antara nilai dugaan respon dan residual.



Gambar 2. *Scatterplot* antara Fits dan Residual

Berdasarkan plot pada Gambar 2 terlihat pencaranya menyebar ke segala arah dan tidak membentuk adanya suatu pola, sehingga secara visual asumsi identik telah terpenuhi. Selain itu, untuk mengetahui terjadi heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan uji *Glejser*. Uji *Glejser* dilakukan dengan cara meregresikan nilai mutlak dari residual dengan variabel prediktor yang signifikan terhadap model. Berikut adalah hasil dari uji *Glejser*.

Tabel 5. ANOVA dari Uji *Glejser*

Sumber	Df	Sum of Square	Mean Square	F_{hitung}	*P-value*
Regresi	20	10,689	0,534	0,723	0,729
Error	8	5,838	0,729		
Total	28	16,528			

Dari ANOVA pada Tabel 5 dapat diketahui bahwa *p-value* dari uji *Glejser* adalah sebesar 0,729, yaitu lebih besar dari nilai α(0,05). Sehingga dapat diputuskan bahwa H_0 gagal ditolak. Jadi dapat diartikan bahwa tidak terjadi heteroskedastisitas.

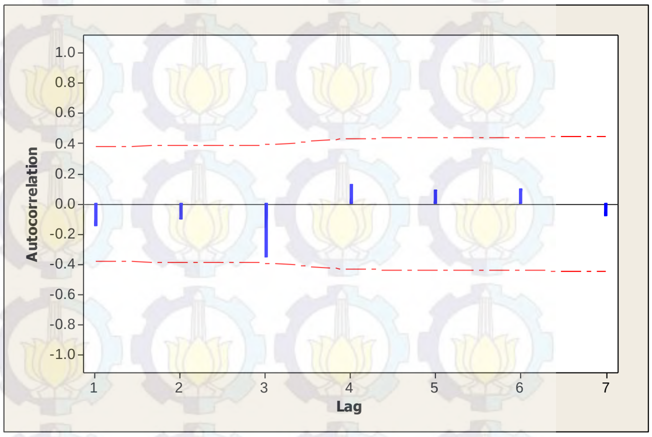
4.5.2 Uji Independen

Untuk melakukan pengujian asumsi residual independen maka menggunakan hipotesis sebagai berikut.

$H_0 : \rho = 0$ (residual independen)

$H_1 : \rho \neq 0$ (residual tidak independen)

Untuk melakukan apakah residual independen atau tidak dapat dilakukan dengan cara melihat plot ACF dari residual. Apabila terdapat minimal satu autokorelasi pada lag yang keluar dari batas signifikansi maka H_0 ditolak, yaitu residual tidak independen. Berikut adalah hasil plot ACF dari residual.



Gambar 3. ACF dari Residual

Berdasarkan plot ACF dari residual pada Gambar 3 terlihat bahwa autokorelasi pada semua lag berada di dalam batas atau bisa dikatakan tidak ada autokorelasi yang keluar dari batas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 tidak ditolak, maka residual telah memenuhi asumsi independen.

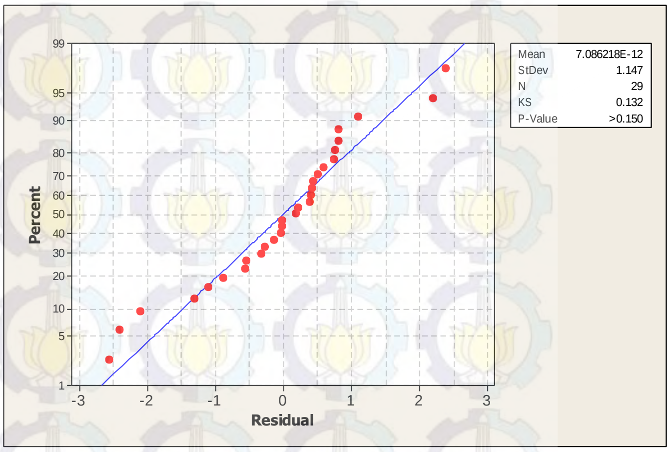
4.5.3 Uji Distribusi Normal

Untuk melakukan pengujian asumsi residual berdistribusi normal digunakan hipotesis sebagai berikut.

$H_0 : F_0(x) = F(x)$ (residual berdistribusi normal)

$H_1 : F_0(x) \neq F(x)$ (residual tidak berdistribusi normal)

Untuk melakukan pengujian distribusi normal dapat dilakukan dengan Uji *Kolmogorov-Smirnov*. Berikut adalah hasil pengujian dengan *Kolmogorov-Smornov*.



Gambar 4. Hasil Uji *Kolmogorov-Smirnov*

Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa *p-value* dari Uji *Kolmogorov-Smirnov* menunjukkan nilai >0,150, nilai ini lebih dari nilai α (0,05). Maka dapat diputuskan bahwa gagal tolak H_0. Dapat disimpulkan bahwa residual telah berditribusi normal.

Berdasarkan hasil pembahasan pada Deret Fourier dan Spline *Truncated* pada kasus kemiskinan di Provinsi Papua maka dapat disimpulkan bahwa metode Spline *Truncated* lebih baik daripada Deret Fourier. Berikut ini hasil perbandingan dari model Deret Fourier dan Spline *Truncated*.

Tabel 6. Perbandingan metode Deret Fourier dan Spline *Truncated*

Model	GCV	R^2	MSE
Deret Fourier	18,79	89,20%	8,94
Spline *Truncated*	16,70	98,46%	4,61

Dilihat pada Tabel 6, nilai GCV dari Spline *Truncated* adalah 16,70 lebih minimum dibandingkan dengan Deret Fourier sebesar 18,79. Nilai R^2 Spline *Truncated* sebesar 98,46% tersebut lebih besar daripada Deret Fourier yaitu 89,20%. MSE Spline *Truncated* lebih kecil daripada Deret Fourier.

V. KESIMPULAN

1. Estimator kurva regresi nonparametrik multivariabel Deret Fourier diperoleh dari optimasi:

$$\underset{\underset{\sim}{\beta}\in R^{q(K+2)}}{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{q}f_j\left(x_{ji}\right)\right)^2\right\}$$

Optimasi ini menghasilkan estimator Deret Fourier:

$$\hat{\mu}\left(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{qi}\right)=\sum_{j=1}^{q}\hat{f}_j\left(x_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{b}_jx_{ji}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\hat{\alpha}_{kj}\cos kx_{ji}\right).$$

2. Estimator kurva regresi nonparametrik multivariabel Spline *Truncated* diperoleh dari optimasi:

$$\underset{\underset{\sim}{\beta}\in R^{q(K+2)}}{Min}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{q}\left(b_jx_{ji}+\frac{1}{2}\alpha_{0j}+\sum_{k=1}^{K}\alpha_{kj}\cos kx_{ji}\right)\right)^2\right\}=\underset{\underset{\sim}{\beta}\in R^{q(K+2)}}{Min}\left\{\mathbb{Q}\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

Optimasi ini menghasilkan estimator Spline *Truncated*:

$$\hat{\mu}\left(x_{1i},x_{2i},\dots,x_{pi}\right)=\sum_{j=1}^{p}\hat{f}_j\left(x_{ji}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\sum_{v=1}^{m}\hat{\beta}_{vj}x_{ji}^{v}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\hat{\beta}_{j(k+m)}\left(x_{ji}-K_{jk}\right)_+^m.$$

3. Berdasarkan hasil pembahasan pada Spline *Truncated* dan Deret Fourier pada kasus kemiskinan di Provinsi Papua maka dapat disimpulkan bahwa metode Spline *Truncated* lebih baik daripada Deret Fourier karena nilai GCV Spline *Truncated* lebih minimun dibandingkan dengan Deret Fourier. Nilai R^2 Spline *Truncated* lebih besar daripada Deret Fourier dan MSE Spline *Truncated* lebih kecil daripada Deret Fourier.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada BPPDN Dikti yang telah memberikan beasiswa kepada peneliti selama mengikuti Program Magister, pada Program Pasca Sarjana, Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asrini, L. J., dan Budiantara, I N. (2014), “Fourier Series Semiparametric Regression Models (CaseStudy: The Production of Lawland Rice Irrigation in Central Java”, *ARPN Journal of Engineering and Apllied Sciences*, Vol.9, hal.1501-1506.

[2] Pane, R., Budiantara, I, N., Zain, Ismaini, and Widjanarko O., B. (2014), “Parametric and Nonparametric Estimators in Fourier Series Semiparametric Regression and Their Characteristics”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.8, hal.5053-5064.

[3] Asrini, L., J. (2012), “*Regresi Parametrik Deret Fourier”*, Prosiding Seminar Nasional FMIPA Universitas Negeri Surabaya, hal.77-80.

[4] Tripena, A. and Budiantara, I N., (2007), “Fourier Estimator in Nonparametric Regression”, *International Conference On Natural Sciences and Applied Natural Scienes*, Ahmad Dahlan University, Yogyakarta.

[5] Tjahjono, E. (2009), *Estimator Deret Fourier Terbobot pada Regresi Nonparametrik*, Tesis, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[6] Semiati, R. (2010), *Regresi Nonparametrik Deret Fourier Birespon*, Tesis, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[7] Tripena, A. (2013), “Estimator Deret Fourier untuk Estimasi Kurva Regresi Nonparametrik Birespon*”, Magistra*, Vol. 84, hal. 1-15.

[8] Prahutama, A. (2013), “Model Regresi Nonparametrik dengan Pendekatan Deret Fourier pada Kasus Tingkat Pengangguran Terbuka di Jawa Timur”, *Prosiding Seminar Nasional Statistika Undip*, Vol. 10, hal. 69-76.

[9] Budiantara, I.N., (2009), *Spline dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik: Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa Mendatang*, Pidato pengukuhan sebagai Guru Besar di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[10] Eubank, R. L. (1999), *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*, Second Edition, New York, Marcal Dekker, Inc.

[11] Budiantara, I., N. (2000), *Estimator Spline dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik,* Disertasi, Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

[12] Mubarak, R. (2012). *Analisis Regresi Spline Multivariabel untuk Pemodelan Kematian Penderita Demam Berdarah Dengeu (DBD) di Jawa Timur*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[13] Binta, M., F. (2014). *Pemodelan Regresi Nonparametrik Spline Truncated dan Aplikasinya pada Angka Kelahiran Kasar di Surabaya*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[14] Damayanti,Y. (2013), *Pemodelan Penduduk Miskin di Jawa Timur Menggunakan Metode Geographically Weighted Regression (GWR)*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[15] Prasetyawan, I., F. (2011), Penentuan Matriks Pembobot yang Optimum pada Pemodelan Geographically Weighted Regression (GWR) (Studi Kasus: Penyusunan Model Kemiskina di Jawa Tengah), Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[16] Surya, L. (2013), *Faktor – Faktor yang Mempengaruhi Persentase Penduduk Miskin di Jawa Timur Menggunakan Regresi Semiparametrik Spline*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[17] Ekasari, D, F. (2012), Pemodelan SEM dengan Generalized Structured Component Analysis (GSCA) (Studi Kasus: Penentuan Struktur Model Kemiskinan Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Tengah), Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[18] Samsodin, M. (2012), *Regresi Spline Polynomial Truncated Multirespon untuk Pemodelan Indikator Kemiskinan di Provinsi Jawa Timur*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[19] Fadillah. (2010), *Analisis Regresi Jumlah Penduduk Miskin dengan Faktor – Faktor yang Mempengaruhinya di Jawa Timur*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[20] Pintowati,W dan Bambang W.,O. (2012), “Pemodelan Kemiskinan di Provinsi Jawa Timur dengan Pendekatan Multivariate Adaptive”, *Jurnal Sains dan Seni ITS*, Vol.1, No. 1.

[21] Rusdarti dan Karolina S., L. (2013), “Faktor-faktor yang Mempengaruhi Tingkat Kemiskinan di Provinsi Jawa Tengah”, *Jurnal Economia,* Vol. 9, No.1.

[22] Bilodeau, M., 1992, Fourier Smoother and Additive Models*, The Canadian Journal of Statistics,* Vol.3, hal.257-269.

[23] Budiantara, I., N. (2007), "Inferensi Statistik untuk Model Spline", *Jurnal Mat-Stat*, Vol. 7, hal.1-14.

[24] Eubank,R.L.,1988, *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Mercel Dekker, New York.